# Subiectul III — integral

Matematica — M2_Stiinte-ale-Naturii

*Subiectul întreg, din toate modelele de examen ale categoriei de mai sus.*

204 exerciții · din 204 sesiuni (2012–2026)

## 1. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2012 · Model Oficial**

*2012_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-4}{x^2+1}, & x\le 0\\ x-4, & x>0\end{cases}$.

**5p** **a)** Demonstrați că funcția $f$ este continuă în punctul $x_0=0$.

**5p** **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)}{16-x^2}$.

**5p** **c)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul $A(-1,-2)$.

## 2. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2012 · Model Oficial**

*2012_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

**2.** Se consideră funcțiile $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=3m^2x^2+6mx+9$, unde $m\in\mathbb{R}$.

**5p** **a)** Determinați mulțimea primitivelor funcției $f_0$.

**5p** **b)** Calculați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției $f_1$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

**5p** **c)** Calculați $\int_1^2 \frac{f_2(x)-9}{x}\cdot e^x dx$.

## 3. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2012 · Speciala Subiect V07 · V07**

*2012_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V07.pdf*

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$.

**5p** **a)** Arătați că $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\dfrac{x}{x+1}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Arătați că funcția $f$ este descrescătoare pe $(0,+\infty)$.

**5p** **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{e^{2x}\cdot f^2(x)}{x}$.

## 4. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2012 · Speciala Subiect V07 · V07**

*2012_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V07.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2012}+x^{2011}+x^2+x$.

**5p** **a)** Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției $f$, care verifică relația $F(0)=1$.

**5p** **b)** Calculați $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1}dx$.

**5p** **c)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei $Ox$, a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x^{2012}-x^{2011}$.

## 5. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2012 · Toamna August · V09**

*2012_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf*

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$.

**5p** **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

**5p** **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\cdot\ln x}{x^2-x-1}$.

**5p** **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

## 6. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2012 · Toamna August · V09**

*2012_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\cdot\sqrt{x+1}$.

**5p** **a)** Determinați primitivele funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x+1}}$.

**5p** **b)** Calculați $\displaystyle\int_1^2\sqrt{x+1}\cdot f(x)\,dx$.

**5p** **c)** Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=e^{-x}\cdot f(x)$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=2$ și $x=3$.

## 7. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2012 · Vara Iunie · V05**

*2012_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V05.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=0$. |
| **5p** | **b)** Demonstrați că funcția $f$ este crescătoare pe intervalul $(4,+\infty)$. |
| **5p** | **c)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției $f$. |

## 8. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2012 · Vara Iunie · V05**

*2012_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V05.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

**5p** **a)** Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=xe^x-e^x+2012$ este o primitivă a funcției $f$.

**5p** **b)** Calculați $\int_1^e f(\ln x)\,dx$.

**5p** **c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

## 9. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2013 · Model Oficial**

*2013_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln x$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{3}{2}$. |
| **5p** | **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=1$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că funcția $f$ este concavă pe $(0,+\infty)$. |

## 10. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2013 · Model Oficial**

*2013_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

**2.** Pentru fiecare număr natural nenul $n$ se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=(x+n)e^x$.

**5p** **a)** Calculați $\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

**5p** **b)** Arătați că funcția $f_{2011}$ este o primitivă a funcției $f_{2012}$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\int_0^1 f_n(x)\,dx \geq \frac{9n+5}{6}$, pentru orice număr natural nenul $n$, folosind eventual inegalitatea $e^x \geq x+1$, adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

## 11. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2013 · Speciala Subiect V03 · V03**

*2013_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$. |
| **5p** | **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$. |
| **5p** | **c)** Demonstraţi că funcţia $f$ este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$. |

## 12. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2013 · Speciala Subiect V03 · V03**

*2013_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln 2$.

**5p** **b)** Calculaţi $\displaystyle\int_0^1 x f'(x)\,dx$.

**5p** **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei $Ox$ a graficului funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

## 13. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2013 · Toamna August · V09**

*2013_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$. |
| **5p** | **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcției $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstraţi că $x\geq\ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$. |

## 14. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2013 · Toamna August · V09**

*2013_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x+1)(x-1)$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\int_2^3 \frac{f(x)}{x(x-1)}dx=\frac{7}{2}$.

**5p** **b)** Determinaţi primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcţiei $f$ ştiind că $F(1)=-1$.

**5p** **c)** Arătaţi că $\int_2^e \frac{f(x)\ln x}{x^2-1}dx=\frac{e^2}{4}-2\ln 2+1$.

## 15. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2013 · Vara Iunie · V02**

*2013_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-6x+9\right)$. |
| **5p** | **a)** Arătaţi că $f'(x)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. |
| **5p** | **b)** Verificaţi dacă $f(x)+f''(x)=2\left(f'(x)+e^x\right)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. |
| **5p** | **c)** Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei $f$. |

## 16. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2013 · Vara Iunie · V02**

*2013_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

**5p** **a)** Calculaţi $\displaystyle\int_0^1 (x+1)f(x)\,dx$.

**5p** **b)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\,dx+\int_0^1 x^3 f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.

**5p** **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei $Ox$ a graficului funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)$.

## 17. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2014 · Model Oficial**

*2014_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$. |
| **5p** | **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Arătaţi că funcţia $f$ este descrescătoare. |
| **5p** | **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$. |

## 18. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2014 · Model Oficial**

*2014_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$.

**5p** **a)** Calculaţi $\displaystyle\int_0^1 (x+2)f(x)dx$.

**5p** **b)** Arătaţi că $\displaystyle\int_{2013}^{2014}\left(f(x)+(x+2)f'(x)\right)dx=1$.

**5p** **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei $Ox$ a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{x}{f(x)}$.

## 19. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2014 · Simulare Nationala**

*2014_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$. |
| **5p** | **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$. |
| **5p** | **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstraţi că $f(x)\geq 1$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$. |

## 20. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2014 · Simulare Nationala**

*2014_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

**5p** **a)** Calculaţi $\displaystyle\int_0^1 (x+1)f(x)\,dx$.

**5p** **b)** Calculaţi $\displaystyle\int_1^e (x+1)f(x)\ln x\,dx$.

**5p** **c)** Arătaţi că $F(e-1)=\dfrac{e^2-4e+7}{2}$, unde $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ este primitiva funcției $f$ pentru care $F(0)=1$.

## 21. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2014 · Speciala Subiect V09 · V09**

*2014_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:(-\infty,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x-2}$. |
| **5p** | **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. |
| **5p** | **b)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{(1-x)e^{-x}}{(x-2)^2}$, $x\in(-\infty,2)$. |
| **5p** | **c)** Arătaţi că $f(x)\le -\dfrac{1}{e}$ pentru orice $x\in(-\infty,2)$. |

## 22. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2014 · Speciala Subiect V09 · V09**

*2014_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_1^2 (x+1)f(x)\,dx = 2\ln 2-1$.

**5p** **b)** Arătaţi că $\displaystyle\int_1^e \left(f(x)+(x+1)f'(x)\right)dx = 1$.

**5p** **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei $Ox$ a graficului funcţiei $g:[2,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{\ln x}{f(x)}$.

## 23. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2014 · Toamna August · V07**

*2014_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2+3}$. |
| **5p** | **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. |
| **5p** | **b)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{12x}{\left(x^2+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$. |
| **5p** | **c)** Arătaţi că funcția $f$ este convexă pe intervalul $(-1,1)$. |

## 24. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2014 · Toamna August · V07**

*2014_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\int_1^e f(x)\cdot f'(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

**5p** **b)** Arătaţi că $\int_1^e x^3 f(x)\,dx=\frac{3e^4+1}{16}$.

**5p** **c)** Determinaţi aria suprafaţei plane delimitate de graficul funcţiei $f$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$.

## 25. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2014 · Vara Iunie · V01**

*2014_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x-x+1$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to e} f(x)=1$. |
| **5p** | **b)** Arătați că $f'(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$. |
| **5p** | **c)** Arătați că $f(x)\geq 0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$. |

## 26. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2014 · Vara Iunie · V01**

*2014_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+8x+15}$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^{2014}(x+3)(x+5)f(x)\,dx=2014$.

**5p** **b)** Arătați că $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\cdot f'(x)\,dx=-\frac{1}{144}$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$, $a>0$ știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=a$, are aria egală cu $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{10}{9}$.

## 27. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2015 · Model Oficial**

*2015_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x}$. |
| **5p** | **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcţiei $f$. |
| **5p** | **c)** Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei $f$. |

## 28. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2015 · Model Oficial**

*2015_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{1}{x+1}$.

**5p** **a)** Calculaţi $\displaystyle\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)dx$.

**5p** **b)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx=\frac{4}{3}-\ln 2$.

**5p** **c)** Determinaţi numărul natural nenul $n$, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $f$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuaţii $x=0$, $x=1$, are aria egală cu $\dfrac{1}{2}+\ln\left(n^2+n\right)$.

## 29. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2015 · Simulare Nationala**

*2015_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf*

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x-e^x+1$.

**5p** **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Determinați intervalele de monotonie a funcției $f$.

## 30. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2015 · Simulare Nationala**

*2015_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+3x^2+2x+1$.

**5p** **a)** Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

**5p** **b)** Determinați primitiva $F$ a funcției $f$ pentru care $F(-1)=1$.

**5p** **c)** Arătați că pentru orice număr real nenul $a$ are loc relația $\int_0^a f(x)dx+\frac{1}{a}\int_a^0 f(x)dx=a^4-1$.

## 31. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2015 · Speciala Subiect V09 · V09**

*2015_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\ln x+x$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=e$. |
| **5p** | **b)** Determinaţi ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei $f$. |
| **5p** | **c)** Arătați că funcția $f$ este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$. |

## 32. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2015 · Speciala Subiect V09 · V09**

*2015_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx=\frac{3}{2}$.

**5p** **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)dx=-\frac{1}{2}+\ln 2$.

**5p** **c)** Determinaţi volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

## 33. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2015 · Toamna August · V01**

*2015_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V01.pdf*

---

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-8x^2+16$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=4x(x-2)(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x^4}{x^2+1}$.

**5p** **c)** Determinaţi coordonatele punctelor situate pe graficul funcției $f$, în care tangenta la graficul funcției $f$ este paralelă cu axa $Ox$.

## 34. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2015 · Toamna August · V01**

*2015_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V01.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+2}{x}$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2 x f(x)\,dx=\frac{7}{2}$.

**5p** **b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x+2\ln x+2015$ este o primitivă a funcției $f$.

**5p** **c)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=(f(x)-1)\ln x$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuaţii $x=1$ și $x=e$ are aria egală cu $1$.

## 35. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2015 · Vara Iunie · V08**

*2015_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V08.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-1$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$. |
| **5p** | **b)** Arătați că funcția $f$ este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $e^x\geq x+1$, pentru orice număr real $x$. |

## 36. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2015 · Vara Iunie · V08**

*2015_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V08.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+5$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^1 \left(f(x)+2x-5\right)dx=\frac{1}{3}$.

**5p** **b)** Calculaţi $\int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx$.

**5p** **c)** Arătați că $\int_{2014}^{2015} \frac{1}{f(x)}dx\le\frac{1}{4}$.

## 37. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2016 · Model Oficial**

*2016_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)e^x$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=(x-1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$. |
| **5p** | **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $f'(x)\geq -1$, pentru orice număr real $x$. |

## 38. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2016 · Model Oficial**

*2016_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x}$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=3$.

**5p** **b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+\ln x+2016$ este o primitivă a funcţiei $f$.

**5p** **c)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este mai mic decât $14\pi$.

## 39. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2016 · Simulare Nationala**

*2016_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf*



**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x-2$.

**5p** **a)** Determinaţi primitiva $F$ a funcţiei $f$, pentru care $F(1)=0$.

**5p** **b)** Calculaţi $\int_0^1 x f(x)\,dx$.

**5p** **c)** Determinaţi numerele reale $x$, ştiind că $\int_1^x f(t)\,dt=0$.

## 40. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2016 · Simulare Nationala**

*2016_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x-2$.

**5p** **a)** Determinaţi primitiva $F$ a funcţiei $f$, pentru care $F(1)=0$.

**5p** **b)** Calculați $\int_0^1 x f(x)\,dx$.

**5p** **c)** Determinați numerele reale $x$, știind că $\int_1^x f(t)\,dt=0$.

## 41. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2016 · Speciala Subiect V01 · V01**

*2016_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V01.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2x-11}{x-3}$. |
| **5p** | **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$, $x\in(3,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $f(\pi)>13$. |

## 42. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2016 · Speciala Subiect V01 · V01**

*2016_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V01.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3x+1)e^x$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{e^x} f(x)\,dx=\frac{5}{2}$.

**5p** **b)** Determinați numărul real $m$, pentru care funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(3x+m)e^x$ este o primitivă a funcției $f$.

**5p** **c)** Determinați numărul real nenul $a$, știind că $\int_0^a f(x)\,dx=3a$.

## 43. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2016 · Toamna August · V02**

*2016_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V02.pdf*

---

**1.** Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstraţi că $f(e)<\dfrac{7}{2}$.

## 44. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2016 · Toamna August · V02**

*2016_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V02.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2 x^2 f(x)\,dx = e(e-1)$.

**5p** **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcţiei $f$ este convexă pe intervalul $[2,+\infty)$.

**5p** **c)** Demonstrați că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $f$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuaţii $x=1$ și $x=2$ are aria mai mică sau egală cu $e(e-1)$.

## 45. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2016 · Vara Iunie · V08**

*2016_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V08.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$. |
| **5p** | **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{3\left(x^3-1\right)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcţiei $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstraţi că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$. |

## 46. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2016 · Vara Iunie · V08**

*2016_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V08.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+3}$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2\left(x^2+3x+3\right)f(x)\,dx=6$.

**5p** **b)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=3$ are aria egală cu $\ln 7$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\displaystyle\int_{-1}^0 f'(x)f(x)\,dx=0$.

## 47. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2017 · Model Oficial**

*2017_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$. |
| **5p** | **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{3(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcţiei $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstraţi că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$. |

## 48. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2017 · Model Oficial**

*2017_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+3}$.

**5p** **a)** Calculați $\displaystyle\int_1^2\left(x^2+3x+3\right)f(x)\,dx$.

**5p** **b)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=3$ are aria egală cu $\ln 7$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\displaystyle\int_{-1}^{0} f'(x)f(x)\,dx=0$.

## 49. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2017 · Simulare Nationala**

*2017_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf*

**1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\ln x$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=x(2\ln x+1)$, $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $1+2ef(x)\geq 0$, pentru orice număr real $x$, $x\in(0,+\infty)$.

## 50. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2017 · Simulare Nationala**

*2017_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx=-\frac{1}{2}$.

**5p** **b)** Determinați numărul real $a$, știind că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(x+a)e^x$ este o primitivă a funcției $f$.

**5p** **c)** Arătați că $\int_0^1 x^3 f(x)\,dx\le-\frac{1}{20}$.

## 51. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2017 · Speciala Subiect V04 · V04**

*2017_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V04.pdf*

**1.** Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{e^x+1}=0$.

## 52. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2017 · Speciala Subiect V04 · V04**

*2017_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V04.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+2x$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^1 \left(f(x)-2x\right)dx=e-1$.

**5p** **b)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-e^x$.

**5p** **c)** Determinaţi numărul real $a$, știind că $\int_0^a x f(x)\,dx=1+\frac{2a^3}{3}$.

## 53. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2017 · Toamna August · V10**

*2017_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V10.pdf*

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\frac{2}{x}+\ln x\geq 1+\ln 2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

## 54. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2017 · Toamna August · V10**

*2017_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V10.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2}{2x}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_1^2 2x\,f(x)\,dx=\frac{13}{3}$.

**5p** **b)** Determinați primitiva $F$ a funcției $f$, pentru care $F(1)=1$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\displaystyle 2\int_1^n \left(f(x)+x\,f'(x)\right)dx=n^2-1$, pentru orice număr natural $n$, $n\geq 2$.

## 55. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2017 · Vara Iunie · V02**

*2017_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf*

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+2017}{e^x}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{-(x+2016)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că funcția $f$ este convexă pe $[-2015,+\infty)$.

## 56. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2017 · Vara Iunie · V02**

*2017_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx=\frac{4}{3}$.

**5p** **b)** Determinați primitiva $F$ a funcţiei $f$, știind că $F(1)=\dfrac{\pi}{4}+1$.

**5p** **c)** Determinați numărul natural $n$, știind că $\displaystyle\int_0^n x f(x)dx=\frac{1}{2}\ln 5$.

## 57. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2018 · Model Oficial**

*2018_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$. |
| **5p** | **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $e^{x-2}-x+1\geq 0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$. |

## 58. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2018 · Model Oficial**

*2018_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x)\,dx=1$.

**5p** **c)** Determinaţi volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

## 59. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2018 · Simulare Nationala**

*2018_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-6x+9\right)$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, $x\in\mathbb{R}$. |
| **5p** | **b)** Determinați punctele de extrem ale funcției $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $(x-3)^2\le 4e^{1-x}$, pentru orice $x\in(-\infty,3]$. |

## 60. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2018 · Simulare Nationala**

*2018_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3x^2-4x+1, & x\in(-\infty,1)\\ \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$.

**5p** **a)** Demonstrați că funcția $f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_{-1}^{e} f(x)\,dx=2\left(4-\sqrt{e}\right)$.

**5p** **c)** Determinați numărul natural $n$ pentru care $\int_{e^n}^{e^{n+1}} f^2(x)\,dx=\frac{7}{3}$.

## 61. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2018 · Speciala Subiect V03 · V03**

*2018_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x+1$. |
| **5p** | **a)** Arătaţi că $f'(x)=xe^x$, $x\in\mathbb{R}$. |
| **5p** | **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $\sqrt[n]{e}\le\dfrac{n}{n-1}$, pentru orice număr natural $n$, $n\ge 2$. |

## 62. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2018 · Speciala Subiect V03 · V03**

*2018_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x-2}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx=\frac{4}{3}$.

**5p** **b)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x+2)}{x+2}\cdot\sqrt{e^x}$ este egal cu $\pi$.

**5p** **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_3^x f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-2}}\,dt}{x^2}$.

## 63. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2018 · Toamna August · V09**

*2018_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(1-x)(x+3)}{\left(x^2+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$. |
| **5p** | **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $f\left(\sqrt{2}\right)>f\left(\sqrt[3]{3}\right)$. |

## 64. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2018 · Toamna August · V09**

*2018_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^{x}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_{0}^{3}\frac{xf(x)}{e^{x}}dx=9$.

**5p** **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției $f$ are un singur punct de inflexiune.

**5p** **c)** Determinați numărul natural nenul $n$, pentru care suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $f$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuaţii $x=0$ și $x=n$ are aria egală cu $1$.

## 65. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2018 · Vara Iunie · V02**

*2018_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf*

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\le 1-\frac{1}{\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

## 66. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2018 · Vara Iunie · V02**

*2018_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+\dfrac{1}{x+1}$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2 (x+1)f(x)\,dx=22$.

**5p** **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^1 \left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)e^{x^3}\,dx$.

**5p** **c)** Determinați numărul natural nenul $n$, știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-3x^2$ este egal cu $\dfrac{\pi}{n}$.

## 67. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2019 · Model Oficial**

*2019_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*



**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^3 f(x)dx=12$.

**5p** **b)** Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x}{f(x)}$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

**5p** **c)** Demonstrați că există un unic număr real $x$ pentru care $\int_0^x e^{f(t)}dt=x$.

## 68. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2019 · Model Oficial**

*2019_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^3 f(x)dx=12$.

**5p** **b)** Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{x}{f(x)}$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

**5p** **c)** Demonstrați că există un unic număr real $x$ pentru care $\int_0^x e^{f(t)}dt=x$.

## 69. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2019 · Simulare Nationala**

*2019_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=5\ln x-x^2-3x$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(1-x)(2x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Demonstrați că funcția $f$ este concavă pe $(0,+\infty)$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $5\ln x\le x^2+3x-4$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$. |

## 70. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2019 · Simulare Nationala**

*2019_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf*

| | |
|---|---|
| | **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+4x+5\right)e^x$. |
| **5p** | **a)** Demonstrați că orice primitivă a funcției $f$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$. |
| **5p** | **b)** Calculați $\int_0^1\left(f(x)-x^2e^x-5e^x\right)dx$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $\frac{e^2-1}{e^3}\le\int_{-3}^{-1}f(x)dx\le\frac{2\left(e^2-1\right)}{e^3}$. |

## 71. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2019 · Speciala Subiect V08 · V08**

*2019_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V08.pdf*

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+6x+9}{e^x}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{-(x+1)(x+3)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $0\le(x+3)(y+3)\le 4e^{\frac{x+y+2}{2}}$, pentru orice $x,y\in[-3,+\infty)$.

## 72. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2019 · Speciala Subiect V08 · V08**

*2019_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V08.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2 (x+1)f(x)\,dx=4$.

**5p** **b)** Arătați că funcția $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)$ este o primitivă a funcției $f$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$, $a>1$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^3}f(x)$, axa $Ox$, dreptele de ecuații $x=1$ și $x=a^2$ are aria egală cu $\ln 5$.

## 73. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2019 · Toamna August · V07**

*2019_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf*

---

**1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x^e$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{x-e}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției $f$, în care tangenta la graficul funcţiei $f$ este paralelă cu axa $Ox$.

**5p** **c)** Demonstraţi că ecuația $e^x=x^e$ are exact o soluție în $(0,+\infty)$.

## 74. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2019 · Toamna August · V07**

*2019_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)(x+1)e^x$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x}dx=6$.

**5p** **b)** Determinaţi aria suprafeței plane delimitate de graficul funcţiei $f$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuaţii $x=1$ și $x=2$.

**5p** **c)** Determinaţi numărul real $a$, $a>2$, știind că $\int_2^a \frac{2xe^x}{f(x)}dx=3\ln 2$.

## 75. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2019 · Vara Iunie · V06**

*2019_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V06.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-2x+2\ln(x+1)$. |
| **5p** | **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{-2x}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstraţi că $\ln(1+\cos x)\le\cos x$, pentru orice $x\in(0,\pi)$. |

## 76. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2019 · Vara Iunie · V06**

*2019_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V06.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+3}{e^x}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)e^x dx=6$.

**5p** **b)** Demonstraţi că orice primitivă a funcției $f$ este crescătoare pe intervalul $[-3,+\infty)$.

**5p** **c)** Determinaţi numărul natural nenul $n$, știind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $f$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuaţii $x=0$ și $x=n$ are aria egală cu $4-6e^{-n}$.

## 77. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Model Oficial**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-10$. |
| **5p** | **a)** Arătaţi că $f'(0)=0$. |
| **5p** | **b)** Demonstrați că oricare două tangente la graficul funcției $f$ sunt concurente. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $e^{x^3}\geq(x+1)\left(x^2-x+1\right)$, pentru orice număr real $x$. |

## 78. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Model Oficial**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=x+\frac{9}{x}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{9}{x}\right)dx=4$.

**5p** **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{2}{f(x)}$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=9$ are aria egală cu $2\ln 3$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$, știind că $\int_1^{\sqrt{3}}\left(f(x)-\frac{9}{x}\right)\operatorname{arctg}x\,dx=\frac{5\pi}{12}-\frac{3+\sqrt{3}-a}{2}$.

## 79. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Speciala Subiect V01 · V01**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V01.pdf*

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+2x+2}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

**5p** **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real $a$, ecuația $f(x)=a$ are cel puțin o soluție.

## 80. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Speciala Subiect V01 · V01**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V01.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x+x$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-xe^x\right)dx=\frac{1}{2}$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_1^2\frac{1}{x}\cdot f\left(x^2\right)dx=\frac{e^4-e+3}{2}$.

**5p** **c)** Se consideră $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcției $f$ pentru care $F(1)=0$. Arătați că $\int_0^1 F(x)\,dx=\frac{5-3e}{3}$.

## 81. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test01**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test01.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+5}$. |
| **5p** | **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{(5-x)(x+1)}{\left(x^2+5\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$. |
| **5p** | **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstraţi că $-\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{1}{10}$, pentru orice număr real $x$. |

## 82. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test02**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test02.pdf*

---

**1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-e\ln x$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{x-e}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Demonstrați că graficul funcției $f$ **nu** admite în niciun punct o tangentă paralelă cu dreapta de ecuație $y=x$.

**5p** **c)** Demonstraţi că ecuația $e^x-x^e=0$ are exact o soluție în $(0,+\infty)$.

## 83. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test03**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test03.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)^2e^{-x}$. |
| **5p** | **a)** Arătaţi că $f'(x)=-x(x+2)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$. |
| **5p** | **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $0\le\dfrac{(x+2)(y+2)}{\sqrt{e^{x+y}}}\le 4$, pentru orice $x,y\in[-2,+\infty)$. |

## 84. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test04**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test04.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x}$. |
| **5p** | **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției $f$ în care tangenta la graficul funcţiei $f$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-x$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$. |

## 85. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test05**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test05.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-5$. |
| **5p** | **a)** Determinați panta tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției $f$. |
| **5p** | **b)** Demonstrați că funcția $f$ este convexă pe $\mathbb{R}$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $e^x(1-x)\leq 1$, pentru orice număr real $x$. |

## 86. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test06**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test06.pdf*

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}5x-3, & x\in(-\infty,1)\\ x^2-x+\sqrt{x^2+3}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$.

**5p** **a)** Arătaţi că funcția $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Arătaţi că, pentru orice număr real $a$, $a>1$, tangenta la graficul funcției $f$ în punctul $A(a,f(a))$ **nu** este paralelă cu axa $Ox$.

**5p** **c)** Demonstraţi că funcția $f$ este convexă pe $(1,+\infty)$.

## 87. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test07**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test07.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$. |
| **5p** | **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei $f$. |
| **5p** | **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}$. |

## 88. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test08**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test08.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2^x+3^x-4, & x\in(-\infty,1)\\ \dfrac{x^2-x+1}{x^2}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$. |
| **5p** | **a)** Arătaţi că funcția $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$. |
| **5p** | **b)** Demonstrați că funcția $f$ este crescătoare pe $(-\infty,1)$. |
| **5p** | **c)** Demonstraţi că $f(x)\leq 1$, pentru orice număr real $x$. |

## 89. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test09**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test09.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:(-2+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+4}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x f(x)\right)=2$. |
| **5p** | **b)** Demonstrați că funcţia $f$ este descrescătoare pe intervalul $(-2,+\infty)$. |
| **5p** | **c)** Determinați $x\in[-1,+\infty)$ pentru care $f(x)\in\mathbb{Z}$. |

## 90. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test10**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test10.pdf*

**1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=\sqrt{x}-1$, $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul $A\left(1,-\frac{1}{3}\right)$.

**5p** **c)** Demonstrați că $x\left(2\sqrt{x}-3\right)\geq -1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

## 91. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test11**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test11.pdf*

---

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+x}{e^x}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Demonstrați că tangenta la graficul funcției $f$ în punctul $A(1,f(1))$ este paralelă cu asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Arătaţi că $g'(x)+g(x)=\dfrac{1}{e^x}$, pentru orice număr real $x$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f''(x)$.

## 92. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test12**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test12.pdf*

---

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real nenul $a$, tangentele la graficul funcţiei $f$ în punctele $A(a,f(a))$ și $B(-a,f(-a))$ sunt paralele.

**5p** **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-f(-x)}{\ln x}$.

## 93. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test13**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test13.pdf*



**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(f(x)-\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx=\frac{1}{3}$.

**5p** **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^4\big(f(x)-f(-x)\big)dx$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$, $a>4$, astfel încât $\displaystyle\int_4^a\frac{f(x)}{x}dx=10+\ln\frac{a+\sqrt{a^2+9}}{9}$.

## 94. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test14**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test14.pdf*

---

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}-x-2$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}-1$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Demonstrați că axa $Ox$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că imaginea funcției $f$ este intervalul $(0,+\infty)$.

## 95. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test15**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test15.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-(x+1)\ln(x+1)$. |
| **5p** | **a)** Arătaţi că $f'(x)=1-\ln(x+1)$, $x\in(-1,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Determinați intervalele de monotonie ale funcţiei $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că funcţia $f$ este concavă. |

## 96. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test16**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test16.pdf*

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{2x}(x-5)$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=e^{2x}(2x-9)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

**5p** **c)** Arătaţi că $e^{2x}\leq\dfrac{e^9}{2(5-x)}$, pentru orice $x\in(-\infty,5)$.

## 97. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test17**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test17.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x+1}$. |
| **5p** | **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$, $x\in(-1,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $\ln x\geq\sqrt{\ln x+1}+1-\sqrt{2}$, pentru orice $x\in[e,+\infty)$. |

## 98. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test18**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test18.pdf*

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Se consideră dreapta $d$, asimptota spre $+\infty$ la graficul lui $f$. Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției $f$, în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta $d$.

**5p** **c)** Demonstrați că funcția $f$ este convexă pe $\left[0,\sqrt{3}\right]$.

## 99. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test19**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test19.pdf*

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln\left(2^x+1\right)$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=1-\dfrac{2^x\ln 2}{2^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Demonstrați că funcția $f$ este crescătoare.

**5p** **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției $f$.

## 100. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test20**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test20.pdf*

**1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n-n\ln x+1$, unde $n$ este număr natural nenul.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{n\left(x^n-1\right)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x^n}{x}=0$, pentru orice număr natural nenul $n$.

**5p** **c)** Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui $a$ pentru care ecuaţia $f(x)=a$ are soluţie în intervalul $(0,1]$.

## 101. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test01**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test01.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Calculați $\int_1^e f(x)\,dx$. |
| **5p** | **c)** Arătați că $\int_e^{e^2} x^2 F(x)\,dx = \frac{3}{2}$. |

## 102. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test02**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test02.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x+2)e^x$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x}dx=18$.

**5p** **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

**5p** **c)** Determinaţi numărul natural nenul $n$, știind că $\int_1^n \frac{(x+1)e^x}{f(x)}dx=\frac{3\ln 2}{2}$.

## 103. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test03**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test03.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3e^x$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{e^x} f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.

**5p** **b)** Calculați $\int_1^2 \frac{1}{x^2} f(x)\,dx$.

**5p** **c)** Demonstrați că orice primitivă a funcției $f$ are un singur punct de inflexiune.

## 104. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test04**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test04.pdf*

| | |
|---|---|
| | **2.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$. |
| **5p** | **a)** Arătaţi că $\int_1^e f'(x)\,dx=1$. |
| **5p** | **b)** Calculați $\int_1^e \frac{f^2(x)}{x}\,dx$. |
| **5p** | **c)** Determinaţi numărul real $p$, $p>1$, știind că $\int_1^p x f(x)\,dx=\frac{p^2}{2}\ln p-\frac{3}{4}$. |

## 105. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test05**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test05.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^3\left(f(x)-\frac{4}{x}\right)dx=4$.

**5p** **b)** Calculați $\displaystyle\int_2^6\frac{2}{f(x)}dx$.

**5p** **c)** Determinați numărul real nenul $a$, știind că $\displaystyle\int_1^e\left(f(x)-\frac{4}{x}\right)\ln x\,dx=\frac{e^2+1}{a}$.

## 106. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test06**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test06.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Calculaţi $\int_1^4 g(x)\,dx$. |
| **5p** | **c)** Determinaţi numărul real $m$, $m>1$, pentru care $\int_1^m f(x)\cdot g(x)\,dx=20$. |

## 107. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test07**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test07.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Pentru $m=4$, calculați $\int_1^e f(x)\,dx$. |
| **5p** | **c)** Pentru $m=0$, calculați $\int_1^2 x f(x)\,dx$. |

## 108. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test08**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test08.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Calculați $\int_0^2 f(x)dx$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că orice primitivă $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției $f$ este concavă. |

## 109. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test09**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test09.pdf*



**5p** **c)** Se consideră numerele reale pozitive $a$, $b$ şi $c$. Demonstrați că, dacă $1-\int_0^a \frac{f(x)}{x+1}\,dx$, $1-\int_0^b \frac{f(x)}{x+1}\,dx$ şi $1-\int_0^c \frac{f(x)}{x+1}\,dx$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, atunci $a$, $b$ şi $c$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

## 110. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test10**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test10.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Calculați $\int_0^1 f_1(x)dx$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $\int_0^1 f_n(x)dx \leq \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul $n$. |

## 111. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test11**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test11.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)dx$. |
| **5p** | **c)** Determinați numărul real $a$ pentru care $\int_1^e \left(f(x)+\frac{2x-1}{x^2+1}\right)\ln x\,dx = e^2 + a$. |

## 112. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test12**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test12.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2\ln(2x+1)$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\int_0^1\left(f(x)-2\ln(2x+1)\right)dx=\frac{1}{2}$.

**5p** **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

**5p** **c)** Dacă $F$ este o primitivă a funcției $f$, arătați că $F(\pi)\le F\left(\frac{16}{5}\right)$.

## 113. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test13**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test13.pdf*

---

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(f(x)-\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx=\frac{1}{3}$.

**5p** **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^4\big(f(x)-f(-x)\big)dx$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$, $a>4$, astfel încât $\displaystyle\int_4^a\frac{f(x)}{x}dx=10+\ln\frac{a+\sqrt{a^2+9}}{9}$.

## 114. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test14**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test14.pdf*

**2.** Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3-x-1}{x^2(x+1)}$ și $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^2+1}{x}-\ln(x+1)$.

**5p** **a)** Arătați că funcția $F$ este o primitivă a funcției $f$.

**5p** **b)** Calculați $\displaystyle\int_1^2 (x+1)f(x)\,dx$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$, $a>1$, astfel încât $\displaystyle\int_1^a f(x)\,dx=\frac{1}{2}-\ln\frac{a+1}{2}$.

## 115. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test15**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test15.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-e^x$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{2}-e$.

**5p** **b)** Calculați $\int_0^1 xf(x)dx$.

**5p** **c)** Pentru fiecare număr natural nenul $n$, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n\left(x-f(x)\right)dx$. Demonstrați că $I_n+nI_{n-1}=e$, pentru orice număr natural $n$, $n\geq 2$.

## 116. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test16**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test16.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Arătați că $\int_1^2 \left( f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. |
| **5p** | **c)** Determinați $a \in (1,+\infty)$ astfel încât $\int_0^x f\left(e^t\right) dt = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}+1}\right) + \ln(a-1)$, pentru orice număr real $x$. |

## 117. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test17**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test17.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-4x+5\right)$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}\,dx=\frac{10}{3}$.

**5p** **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției $f$ este convexă.

**5p** **c)** Determinați numerele reale $a$, $b$ și $c$ astfel încât funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x\left(ax^2+bx+c\right)$ este o primitivă a funcției $f$.

## 118. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test18**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test18.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$. |
| **5p** | **c)** Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{f(x)}dx = -e^{\frac{\pi}{2}} \ln 2$. |

## 119. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test19**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test19.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$. |
| **5p** | **c)** Determinați numărul natural $n$, $n \geq 2$, pentru care $\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\sin^2 x}{f^2(x)}\,dx = \frac{1}{9}$. |

## 120. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test20**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test20.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)e^{x^3+3x}\,dx$. |
| **5p** | **c)** Arătați că $15\int_0^1 f^7(x)dx-14\int_0^1 f^6(x)dx=128$. |

## 121. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Toamna August · V03**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf*

**1.** Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+1)$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

**5p** **b)** Arătați că funcția $f$ este convexă.

**5p** **c)** Se consideră funcția $g:(-1,0]\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x+1)^x$. Demonstrați că, dacă $x_1,x_2\in(-1,0]$ astfel încât $x_1\le x_2$, atunci $g(x_1)\ge g(x_2)$.

## 122. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Toamna August · V03**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x^3$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{3}{4}$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_0^1 x^2\left(f(x)\right)^3\,dx=\frac{1}{12}$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\int_0^1\left(f(x)\right)^{n+1}\,dx\le\int_0^1\left(f(x)\right)^n\,dx$, pentru orice număr natural nenul $n$.

## 123. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2020 · Vara Iunie · V06**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V06.pdf*

**1.** Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2\sqrt{x^2-1}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=2x\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $x\in(1,+\infty)$.

**5p** **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-f(x)}{x}$.

**5p** **c)** Demonstraţi că axa $Ox$ este tangentă la graficul funcţiei $f$.

## 124. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2020 · Vara Iunie · V06**

*2020_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V06.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+2}$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+2x+2\right) f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

**5p** **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2 \left(f(x)+\frac{1}{x^2+2x+2}\right)dx=\frac{1}{2}\ln 5$.

**5p** **c)** Arătați că $\displaystyle\int_1^e \left(\frac{1}{f(x)}-2\right)\ln x\,dx=\frac{e^2+5}{4}$.

## 125. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2021 · Model Oficial**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}-1$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=-1$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\sqrt{\left(x^2+1\right)^2+2\left(x^2+1\right)+2}-\sqrt{4x^2+4x+2}\le(x-1)^2$, pentru orice număr real $x$.

## 126. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2021 · Model Oficial**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $2\left(\sqrt{2}-1\right)$. |
| **5p** | **c)** Arătați că $\int_1^2 \frac{f\left(x^2\right)}{x}dx=\ln\left(\sqrt{34}-\sqrt{17}+4\sqrt{2}-4\right)$. |

## 127. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2021 · Simulare Nationala**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf*

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{2\left(x^2+1\right)\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+1\right)}}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\sqrt{2}\le\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}}+\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}}\le\sqrt{6}$, pentru orice număr real $x$.

## 128. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2021 · Simulare Nationala**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Calculați $\int_1^e \left(2x+3-f\left(x\right)\right)dx$. |
| **5p** | **c)** Arătați că $\int_0^1 x^2 f\left(x^3+1\right)dx=\frac{4\left(2-\ln 2\right)}{3}$. |

## 129. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test01**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test01.pdf*



**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\sin x$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sin x}dx = e(e-1)$.

**5p** **b)** Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

**5p** **c)** Arătați că $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{f(x)}dx = -\frac{\ln 2}{\sqrt{e^{\pi}}}$.

## 130. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test02**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test02.pdf*



**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2xe^x-2x+1}{x}$.

**5p** **a)** Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\ln x+2e^x-2x+2021$ este o primitivă a funcției $f$.

**5p** **b)** Arătați că $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx=2e^e-4e+3$.

**5p** **c)** Calculați $\displaystyle\int_1^2 x\,f(x)\,dx$.

## 131. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test03**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test03.pdf*

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x+2}{\left(x^2+2x+2\right)\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Determinați imaginea funcției $f$.

## 132. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test04**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test04.pdf*

---

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x-1+\sqrt{x^2-x+1}, & x\in(-\infty,0) \\ x\ln(x+1), & x\in[0,+\infty) \end{cases}$.

**5p** **a)** Arătaţi că funcția $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Demonstrați că funcția $f$ este convexă pe $(0,+\infty)$.

**5p** **c)** Arătați că, pentru orice număr real $a$, $a<0$, tangenta la graficul funcției $f$ în punctul $A(a,f(a))$ **nu** este paralelă cu axa $Ox$.

## 133. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test05**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test05.pdf*



**2.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^5 x(x+2)f(x)\,dx=16$.

**5p** **b)** Calculați $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$.

**5p** **c)** Demonstrați că orice primitivă $F$ a funcției $f$ este concavă.

## 134. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test06**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test06.pdf*



**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{e^{2x}}$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{3x}f(x)}{2x+1}\,dx=e-1$.

**5p** **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

**5p** **c)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)}f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\frac{e-1}{2e^2}$.

## 135. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test07**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test07.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)\ln x$. |
| **5p** | **a)** Arătaţi că $f'(x)=1+\frac{1}{x}+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul $A(1,0)$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că funcția $f$ este convexă pe $[1,+\infty)$. |

## 136. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test08**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test08.pdf*

**1.** Se consideră funcția $f:(-1,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{-4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$, $x\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul în care graficul intersectează axa $Oy$.

**5p** **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f(x+1)}$.

## 137. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test09**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test09.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$. |
| **5p** | **a)** Arătaţi că $e^x\left(f(x)+f'(x)\right)=1$, pentru orice număr real $x$. |
| **5p** | **b)** Determinaţi ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că dreapta de ecuație $y=x$ este tangentă la graficul funcţiei $f$. |

## 138. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test10**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test10.pdf*

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x+a(x+1)$, unde $a$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\ln x+1+a$, $x\in(0,+\infty)$, pentru orice număr real $a$.

**5p** **b)** Pentru $a=1$, determinați intervalele de monotonie a funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real $a$, funcția $f$ este convexă.

## 139. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test11**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test11.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$, $x\in(1,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că funcția $f$ **nu** este surjectivă. |

## 140. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test12**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test12.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$. |
| **5p** | **b)** Arătaţi că graficul funcției $f$ nu admite asimptotă spre $+\infty$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $f\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)<f\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$. |

## 141. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test01**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test01.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\sin x$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sin x}dx = e(e-1)$.

**5p** **b)** Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

**5p** **c)** Arătați că $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{f(x)}dx = -\frac{\ln 2}{\sqrt{e^{\pi}}}$.

## 142. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test02**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test02.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2xe^x-2x+1}{x}$.

**5p** **a)** Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\ln x+2e^x-2x+2021$ este o primitivă a funcției $f$.

**5p** **b)** Arătați că $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx=2e^e-4e+3$.

**5p** **c)** Calculați $\displaystyle\int_1^2 x f(x)\,dx$.

## 143. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test03**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test03.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Calculați $\int_1^2 (x+2)f(x)\,dx$. |
| **5p** | **c)** Determinați numărul real $m$, $m>2$, astfel încât $\int_2^m f(x)\,dx = 2m + \frac{1}{m} - \frac{17}{2}$. |

## 144. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test04**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test04.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Calculați $\int_{\frac{1}{4}}^{4} g(x)dx$. |
| **5p** | **c)** Determinați numărul real $m$, $m \in (0,1)$, pentru care $\int_{m}^{1} f^2(x)g(x)dx = \frac{1}{3}$. |

## 145. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test05**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test05.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^5 x(x+2)f(x)\,dx=16$.

**5p** **b)** Calculați $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$.

**5p** **c)** Demonstrați că orice primitivă $F$ a funcției $f$ este concavă.

## 146. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test06**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test06.pdf*

| | |
|---|---|
| | **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{e^{2x}}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{3x}f(x)}{2x+1}\,dx=e-1$. |
| **5p** | **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^1 e^x f(x)\,dx$. |
| **5p** | **c)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)}f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\frac{e-1}{2e^2}$. |

## 147. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test07**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test07.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Pentru $n=1$, calculați $\int_0^1 f(x)dx$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 1$, pentru orice număr natural $n$, $n \geq 2$. |

## 148. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test08**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test08.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Calculaţi $\int_0^1 f(x)dx$. |
| **5p** | **c)** Arătaţi că $\int_0^n f(x)e^{-x}dx<1$, pentru orice număr natural nenul $n$. |

## 149. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test09**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test09.pdf*

| | |
|---|---|
| | **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$. |
| **5p** | **a)** Arătaţi că $\int_0^{\pi} f(x)dx=2$. |
| **5p** | **b)** Calculaţi $\int_0^{\pi} xf(x)dx$. |
| **5p** | **c)** Arătaţi că $\int_0^{1} f(x)dx\geq\int_0^{1} f^2(x)dx$. |

## 150. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test10**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test10.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+e^x$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=-\frac{1}{e}$.

**5p** **b)** Calculați $\int_{0}^{1} x\,f\left(x^2\right)dx$.

**5p** **c)** Pentru fiecare număr natural nenul $n$, se consideră numărul $I_n=\int_{0}^{2} x^n\left(f(x)-2x\right)dx$. Demonstrați că $I_{n+1}+(n+1)I_n=2^{n+1}e^2$, pentru orice număr natural nenul $n$.

## 151. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test11**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test11.pdf*

| | |
|---|---|
| | **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\int_0^1 2f(x)dx=3$. |
| **5p** | **b)** Calculați $\int_0^1 e^x f(x)dx$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $\int_0^e f(e^x)dx\le\int_0^e e^{f(x)}dx$. |

## 152. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test12**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test12.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Calculați $\int_0^1 f\left(e^x\right)dx$. |
| **5p** | **c)** Arătați că $\int_1^4 e^{f(x)}dx = 2e^2$. |

## 153. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2021 · Toamna August · V04**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V04.pdf*

**1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{3(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $x^3\geq 3\ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

## 154. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2021 · Toamna August · V04**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V04.pdf*

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\int_0^2 \frac{f(x)}{e^x}dx=2$.

**5p** **b)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)+e^x\right)dx=\frac{e^2+1}{e}$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\int_{-1-a}^{-1+a} f(x)dx\geq -\frac{2a}{e}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

## 155. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2021 · Vara Iunie · V02**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf*

---

**1.** Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x-\frac{1}{2}\ln(x+2)$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{(2x+3)(2x+5)}{2(x+2)}$, $x\in(-2,+\infty)$.

**5p** **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-f(x)}{x}$.

**5p** **c)** Demonstraţi că $x^2+4x+\frac{15}{4}\geq\frac{1}{2}\ln(2x+4)$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$.

## 156. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2021 · Vara Iunie · V02**

*2021_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\dfrac{2}{x^2+1}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^3 \left(x^2+1\right) f(x)\,dx = 18$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_1^3 x f(x)\,dx = 4+\ln 5$.

**5p** **c)** Demonstrați că $F(x+1)\geq F(x)+1$, pentru orice număr real $x$, unde $F$ este o primitivă a lui $f$.

## 157. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2022 · Model Oficial**

*2022_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*



**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{2\ln x}{x^3}$ și funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, o primitivă a lui $f$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^e x^2\left(f(x)+\frac{2\ln x}{x^3}\right)dx=1$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_1^{\sqrt{5}} x\cdot f\left(x^2+3\right)dx=-\frac{5\ln 2}{128}$.

**5p** **c)** Determinați numerele reale $a$ pentru care $\int_e^{e^2} x\cdot F(x)\,dx=\frac{a^2-1}{2}$.

## 158. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2022 · Model Oficial**

*2022_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{2\ln x}{x^3}$ și funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, o primitivă a lui $f$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^e x^2\left(f(x)+\frac{2\ln x}{x^3}\right)dx=1$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_1^{\sqrt{5}} x\cdot f\left(x^2+3\right)dx=-\frac{5\ln 2}{128}$.

**5p** **c)** Determinați numerele reale $a$ pentru care $\int_e^{e^2} x\cdot F(x)\,dx=\frac{a^2-1}{2}$.

## 159. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2022 · Simulare Nationala**

*2022_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf*



**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+2x}{e^x}$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 e^x f(x)\,dx=e$.

**5p** **b)** Arătați că $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,dx=-1$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$ pentru care $\displaystyle\int_0^1 F(x)f''(x)\,dx=\frac{a(e+1)}{e^2}$, unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este primitiva funcției $f$ cu proprietatea $F(0)=0$.

## 160. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2022 · Simulare Nationala**

*2022_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+2x}{e^x}$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 e^x f(x)\,dx=e$.

**5p** **b)** Arătați că $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,dx=-1$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$ pentru care $\displaystyle\int_0^1 F(x)f''(x)\,dx=\frac{a(e+1)}{e^2}$, unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este primitiva funcției $f$ cu proprietatea $F(0)=0$.

## 161. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2022 · Speciala Subiect V03 · V03**

*2022_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf*

**1.** Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}+\ln(x-1)$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\dfrac{x^2+1}{x-1}+\ln(x-1)\geq 5$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

## 162. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2022 · Speciala Subiect V03 · V03**

*2022_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Arătați că $\int_0^2 \left( f(x) - \frac{4}{6x^2+1} \right) dx = \frac{\ln 5}{6}$. |
| **5p** | **c)** Determinați numărul real $m$ pentru care $\int_0^1 \frac{x+4}{f(x)} \cdot e^{2x} dx = m\left(e^2 - 1\right)$. |

## 163. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2022 · Toamna August · V07**

*2022_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf*

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+x+3-5\ln x$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x-1)(4x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+5\ln x}{3-x-x^2}=-2$.

**5p** **c)** Demonstrați că $2x^2+x\geq 3+5\ln x$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

## 164. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2022 · Toamna August · V07**

*2022_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3-2x)e^x$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}\,dx=2$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_0^2 f(x)\,dx=e^2-5$.

**5p** **c)** Determinați $a\in(-\infty,1)$ pentru care $\int_a^1 \frac{e^{3x}}{f^3(x)}\,dx=\frac{2}{9}$.

## 165. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2022 · Vara Iunie · V01**

*2022_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf*

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+1+\ln x$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{4x^2+1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-\ln x}{x^2+x+4}=2$.

**5p** **c)** Demonstrați că funcția $f$ este bijectivă.

## 166. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2022 · Vara Iunie · V01**

*2022_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Arătați că $\int_0^1 \left( f(x) - 2x^3 \right) dx = 1$. |
| **5p** | **c)** Determinați numărul real $a$ pentru care $\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot f\left(x^2\right) dx = \frac{e^4 - e}{2} + a$. |

## 167. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2023 · Model Oficial**

*2023_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

---

**1.** Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{\sqrt{x+1}}{e^x}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=1-\dfrac{2x+1}{2e^x\sqrt{x+1}}$, $x\in(-1,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $f(x)-x\leq\sqrt{\dfrac{e}{2}}$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.

## 168. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2023 · Model Oficial**

*2023_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*



**5p** **b)** Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{x^3}\,dx = 2\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

**5p** **c)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x+1}{f(x)}$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria strict mai mare decât $1$.

## 169. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2023 · Simulare Nationala**

*2023_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1+\ln x}{x}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $\dfrac{\ln y}{y}-\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$, pentru orice $x,y\in(1,+\infty)$ cu $x<y$. |

## 170. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2023 · Simulare Nationala**

*2023_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf*



**5p** **b)** Arătați că $\int_0^2 \frac{x^2}{f(x)-x+2}dx=\frac{\ln 5}{3}$.

**5p** **c)** Se consideră funcția $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)e^{-x}}{x}$. Arătați că orice primitivă $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției $g$ este concavă.

## 171. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2023 · Speciala Subiect V06 · V06**

*2023_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V06.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2+2x-2\right)$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=e^x\left(x^2+4x\right)$, $x\in\mathbb{R}$. |
| **5p** | **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f'(x)}=1$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $e^{x+4}\left(x^2+2x-2\right)\leq 6$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$. |

## 172. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2023 · Speciala Subiect V06 · V06**

*2023_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V06.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\frac{3}{x}\right)dx=\frac{15}{4}$.

**5p** **b)** Demonstrați că orice primitivă $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)$ este crescătoare.

**5p** **c)** Arătați că $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{f(x)}dx=\frac{\pi}{12\sqrt{3}}$.

## 173. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2023 · Toamna August · V07**

*2023_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf*

---

**1.** Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2+x-2}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{3x(x-4)}{\left(x^2+x-2\right)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $f(x)+f\left(x^2\right)\geq\dfrac{17}{3}$, pentru orice $x\in(1,2]$.

## 174. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2023 · Toamna August · V07**

*2023_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **c)** Arătați că $\int_0^1 \frac{xf\left(e^x\right)}{e^x}dx=\frac{e^2-5}{4}$. |

## 175. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2023 · Vara Iunie · V01**

*2023_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=5+\dfrac{4x-4}{x^2}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{4(2-x)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $\lvert f(x)-f(y)\rvert\leq 1$, pentru orice $x, y\in[1,+\infty)$. |

## 176. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2023 · Vara Iunie · V01**

*2023_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+4\ln x$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^2 \left(f(x)-4\ln x\right)dx=7$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_1^e x\left(f(x)-3x^2\right)dx=e^2+1$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)F''(x)dx=\frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$, pentru orice primitivă $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției $f$.

## 177. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2024 · Model Oficial**

*2024_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x}-3\ln x$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+3\ln x}{x+1}=1$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $\dfrac{x^2+x-2}{x}\le 3\ln x$, pentru orice $x\in(0,2]$. |

## 178. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2024 · Model Oficial**

*2024_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Arătați că $\int_0^1 \frac{x^2}{f(x)-x}dx=\frac{\ln 2}{3}$. |
| **5p** | **c)** Determinați $a\in(-\infty,0)$, știind că $\int_a^0 e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)dx=1-a^3e^{-a}$. |

## 179. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2024 · Simulare Nationala**

*2024_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf*

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^3+2x^2\right)e^x$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=x\left(x^2+5x+4\right)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Arătați că $-\frac{32}{e^{x+4}}\le x^2(x+2)\le\frac{1}{e^{x+1}}$, pentru orice $x\in[-4,0]$.

## 180. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2024 · Simulare Nationala**

*2024_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Simulare_Nationala_Subiect.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Arătați că $\int_1^5 \left(3x^2 - f(x)\right)dx = 2\ln 3$. |
| **5p** | **c)** Se consideră funcția $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x) = f\left(\sqrt{x}-1\right)$. Arătați că $\int_1^4 \left(a+bg(x)\right)g'(x)dx = 4a$, pentru orice numere reale $a$ și $b$. |

## 181. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2024 · Speciala Subiect V09 · V09**

*2024_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3-x}{x^2}+\ln x$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)=0$. |
| **5p** | **c)** Arătați că $4f(x)-1\geq\ln 16$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$. |

## 182. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2024 · Speciala Subiect V09 · V09**

*2024_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_2^4\left(f(x)-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=18$.

**5p** **b)** Arătați că $\displaystyle\int_1^6\left(f(x)-3x\right)dx=2$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$ pentru care $\displaystyle\int_{-2}^{1}\frac{1}{x+3}\left(f(x)-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=9(a-2\ln 2)$.

## 183. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2024 · Toamna August · V03**

*2024_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf*

**1.** Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x-2\ln(x+1)$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2x^2+x-3}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Arătați că $x^2-x\geq 2\ln\dfrac{x+1}{2}$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.

## 184. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2024 · Toamna August · V03**

*2024_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x+1$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^3 \left(f(x)-3x\right)dx=12$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{\left(f(x)-x^2\right)^2}dx=\frac{1}{4}$.

**5p** **c)** Arătați că aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)-x^2-1}{e^x}$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ este egală cu $3\left(1-\frac{2}{e}\right)$.

## 185. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2024 · Vara Iunie · V10**

*2024_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V10.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+x+4}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2\left(4-x^2\right)}{\left(x^2+x+4\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$. |
| **5p** | **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției $f$. |
| **5p** | **c)** Arătați că $f(x)-f(4-x)\leq 1$, pentru orice $x\in[4,+\infty)$. |

## 186. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2024 · Vara Iunie · V10**

*2024_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V10.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+3}{x+1}$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2 (x+1)f(x)\,dx=8$.

**5p** **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=1+2\ln 2$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$ pentru care $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2-1\right)e^x f(x)\,dx=e(e+a)$.

## 187. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2025 · Model Oficial**

*2025_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2-5\right)\sqrt{x}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{5(x-1)(x+1)}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{x\sqrt{x}}=\dfrac{5}{2}$.

**5p** **c)** Arătați că $f(x+2)-f(x)\leq 26$, pentru orice $x\in(0,2]$.

## 188. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2025 · Model Oficial**

*2025_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4\ln x$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^2 \left(f(x)-4\ln x\right)dx=\frac{7}{3}$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)-x^2}{x}dx=2$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $m$ pentru care $\int_1^2 \left(f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2\right)dx=m\left(f(2)-f(1)\right)$.

## 189. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2025 · Speciala Subiect V03 · V03**

*2025_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-8}{e^x}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x+2)(4-x)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$. |
| **5p** | **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $-4e^2\le f(x)\le e^3$, pentru orice $x\in[-3,4]$. |

## 190. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2025 · Speciala Subiect V03 · V03**

*2025_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf*



**5p** **c)** Determinați numărul real $a$ pentru care $\int_1^{e^2}\left(\frac{f(x)}{x}+f'(x)\ln x\right)dx=af\left(e^2\right)$.

## 191. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2025 · Toamna August · V03**

*2025_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-8}{e^x}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x+2)(4-x)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$. |
| **5p** | **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $-4e^2\le f(x)\le e^3$, pentru orice $x\in[-3,4]$. |

## 192. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2025 · Toamna August · V03**

*2025_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf*



**5p** **c)** Determinați numărul real $a$ pentru care $\int_1^{e^2}\left(\frac{f(x)}{x}+f'(x)\ln x\right)dx=af\left(e^2\right)$.

## 193. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2025 · Vara Iunie · V01**

*2025_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf*

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{x^2+x+2}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{-3x^2-x+2}{\left(x^2+x+2\right)^2\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Determinați $a\in(0,+\infty)$ pentru care tangenta la graficul funcției $f$ în punctul $A(a,f(a))$ este paralelă cu axa $Ox$.

## 194. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2025 · Vara Iunie · V01**

*2025_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **c)** Determinați numărul real $m$ pentru care $\int_1^e \frac{f(x)-3}{x^2}\cdot \ln x\,dx=\frac{e^2+m}{4}$. |

## 195. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2026 · Model Oficial**

*2026_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2+x-1\right)$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=e^x\left(x^2+3x\right)$, $x\in\mathbb{R}$. |
| **5p** | **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+f(x)}{f'(x)}=\dfrac{1}{3}$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $e^{x+3}\left(x^2+x-1\right)\le 5$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$. |

## 196. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2026 · Model Oficial**

*2026_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Model_Oficial_Subiect.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **c)** Determinați numărul real $a$ pentru care volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției $g:[0,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ în jurul axei $Ox$ este egal cu $\frac{a\pi}{3}$. |

## 197. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2026 · Rezerva Toamna August · V05**

*2026_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Rezerva_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V05.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că funcția $f$ este concavă. |

## 198. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2026 · Rezerva Toamna August · V05**

*2026_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Rezerva_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V05.pdf*



**5p** **c)** Se consideră $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, o primitivă a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f\left(x^2\right)-3x^4$. Știind că $\int_0^1 G(x)\,dx=\frac{1-e}{2}$, arătați că $G(1)=2$.

## 199. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2026 · Speciala Subiect V02 · V02**

*2026_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V02.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{3x^2-x-2}{2x\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}\cdot f'(x)}{5x-5}=\dfrac{1}{2}$. |
| **5p** | **c)** Determinați imaginea funcției $f$. |

## 200. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2026 · Speciala Subiect V02 · V02**

*2026_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Speciala_Subiect_V02.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **c)** Determinați numărul real $a$ pentru care $\int_2^4 \frac{xf(x)}{f(x-1)}dx = ae(5+\ln 3)$. |

## 201. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2026 · Toamna August · V04**

*2026_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V04.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+8x-2}{x^2+2}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{8(x+1)(2-x)}{\left(x^2+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$. |
| **5p** | **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $-2\le f(x)-f(y)\le 2$, pentru orice $x,y\in[-4,0]$. |

## 202. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2026 · Toamna August · V04**

*2026_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V04.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **c)** Determinați numărul real $m$ pentru care aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{f(x)+3}{\sqrt{x}}$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=4$ este egală cu $58+m\ln 2$. |

## 203. Matematica — Subiectul III, exercițiul 1

**Sursă: 2026 · Vara Iunie · V03**

*2026_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V03.pdf*

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(2x^2-3x\right)$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=e^x(2x+3)(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$. |
| **5p** | **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{f(x)+x}=2$. |
| **5p** | **c)** Determinați numerele reale $a$ pentru care tangenta la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=a$, situat pe graficul funcției $f$, are panta egală cu $0$. |

## 204. Matematica — Subiectul III, exercițiul 2

**Sursă: 2026 · Vara Iunie · V03**

*2026_Matematica_M2_Stiinte-ale-Naturii_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V03.pdf*



| | |
|---|---|
| **5p** | **c)** Se consideră funcția $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{4\sqrt{x+1}}{f(x)}$. Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=4$. |